Ejercicio Nº 2 - Enunciado

1. Para la figura (a) determinar los momentos de segundo orden, respecto de los ejes baricéntricos (J_{xG}, J_{yG} y J_{xGyG}) al igual que sus correspondientes radios de giro y módulos resistentes.

2. Para la figura (b), el momento de inercia respecto del eje x_G.

3. Para la figura (c):
3.1. Los momentos de segundo orden, respecto de sus ejes baricéntricos (J_{xG}, J_{yG} y J_{xGyG})
3.2. El momento de inercia polar (J_O) respecto de su centro O
3.3. El módulo resistente polar (W_O)
3.4. El módulo resistente respecto de sus ejes baricéntricos (W_{xG}, y W_{yG})

4. Determinar para el anillo circular de la figura (d) lo mismo solicitado para la figura (c).

5. Determinar los momentos de segundo orden de un semicírculo, figura (e), respecto de sus ejes baricéntricos (J_{xG}, J_{yG} y J_{xGyG}).

6. Determinar para la figura (f) el momento de inercia centrífugo (J_{xGyG}).

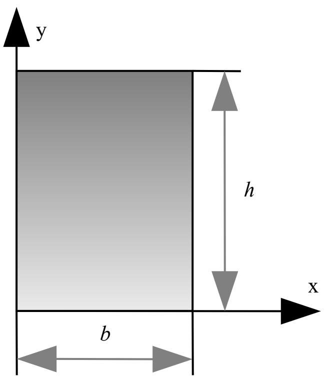


Figura (a)

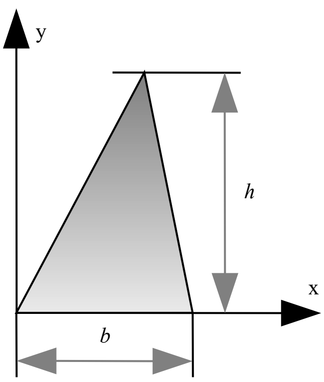


Figura (b)

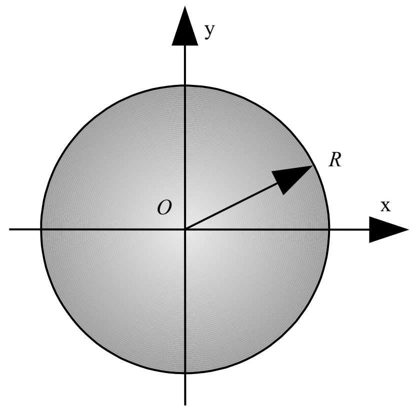


Figura (c)

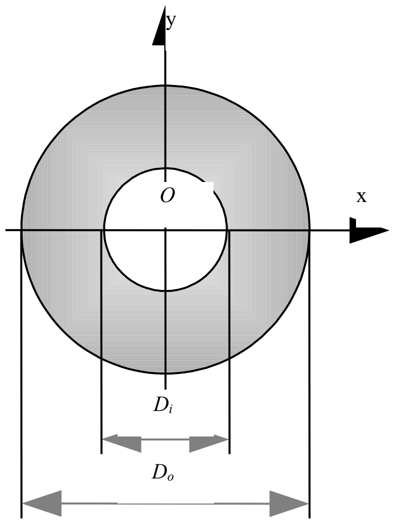


Figura (d)

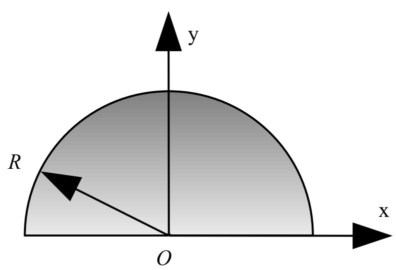


Figura (e)

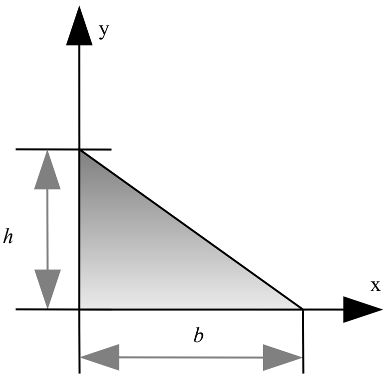
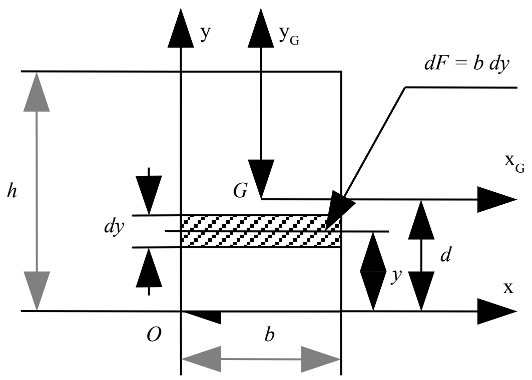


Figura (f)

Ejercicio Nº 2 – Resolución

1. Determinación de los momentos de segundo orden, respecto de los ejes baricéntricos (*J_{xG}*, *J_{yG} y J_{xGyG}*) al igual que sus correspondientes radios de giro y módulos resistentes para la figura (a).



Cálculo de *J_x*:

$$J_x = \iint_F y^2 \cdot dF = b \cdot \int_0^h y^2 \cdot dy = b \cdot \left. \frac{y^3}{3} \right|_0^h = \frac{b \cdot h^3}{3}$$

Cálculo de *J_{xG}*.

Aplicando el teorema de Steiner:

$$J_x = J_{xG} + F \cdot d^2 \quad \text{o} \quad J_{xG} = J_x - F \cdot d^2$$

$$J_{xG} = J_x - F \cdot d^2 = \frac{b \cdot h^3}{3} - (b \cdot h) \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{b \cdot h^3}{3} - \frac{b \cdot h^3}{4}$$

$$\boldsymbol{J_{xG} = \frac{b \cdot h^3}{12}}$$

Análogamente:

$$\boldsymbol{J_{yG} = \frac{h \cdot b^3}{12}}$$

Siendo los ejes baricéntricos, ejes de simetría. En consecuencia son ejes conjugados de inercia, es decir

$$\boldsymbol{J_{xGyG} = 0}$$

y como además son ortogonales, son ejes de principales de inercia

Cálculo de los radios de giro (*i_{xG}* ; *i_{xG}*)

$$i_{xG}^{\ 2} = \frac{J_{xG}^{\ 2}}{F} = \frac{\frac{b \cdot h^3}{12}}{b \cdot h} = \frac{h^2}{12}$$

$$i_{xG} = \sqrt{\frac{h^2}{12}}$$

$$\boldsymbol{i_{xG} = \frac{h}{\sqrt{12}}}$$

$$i_{yG}^{\ 2} = \frac{J_{yG}^{\ 2}}{F} = \frac{\frac{h \cdot b^3}{12}}{b \cdot h} = \frac{b^2}{12}$$

$$i_{xG} = \sqrt{\frac{b^2}{12}}$$

$$\boldsymbol{i_{xG} = \frac{b}{\sqrt{12}}}$$

Cálculo de los módulos resistentes (W_{xG} ; W_{yG})

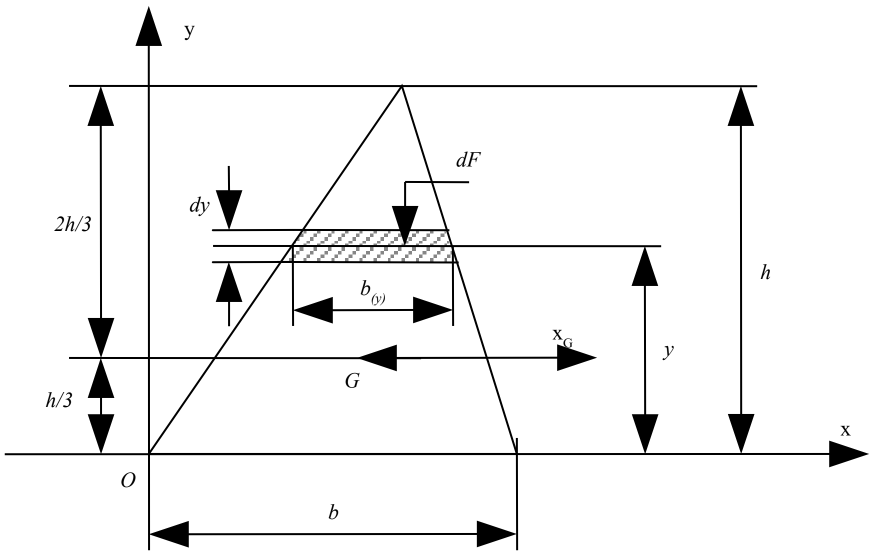
$$W_{xG} = \frac{J_{xG}}{\frac{h}{2}} = \frac{\frac{b \cdot h^3}{12}}{\frac{h}{2}}$$

$$\boldsymbol{W_{xG} = \frac{b \cdot h^2}{6}}$$

$$W_{yG} = \frac{J_{yG}}{\frac{b}{2}} = \frac{\frac{h \cdot b^3}{12}}{\frac{b}{2}}$$

$$\boldsymbol{W_{yG} = \frac{h \cdot b^2}{6}}$$

2. Determinación del momento de inercia, respecto del eje x_G, para la figura (b)



Cálculo de J_x

Teniendo en cuenta que:

$$J_x = \iint_F y^2 \cdot dF$$

por semejanza de triángulos:

$$\frac{b}{h} = \frac{b_{(y)}}{(h-y)}$$

$$b_{(y)} = \frac{b}{h} \cdot (h-y)$$

reemplazando:

$$J_x = \int_0^h y^2 \cdot b_{(y)} \cdot dy = \int_0^h y^2 \cdot \frac{b}{h} \cdot (h-y) \cdot dy = b \cdot \int_0^h y^2 \cdot dy - \frac{b}{h} \cdot \int_0^h y^3 \cdot dy = \frac{b \cdot h^3}{3} - \frac{b \cdot h^3}{4} = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

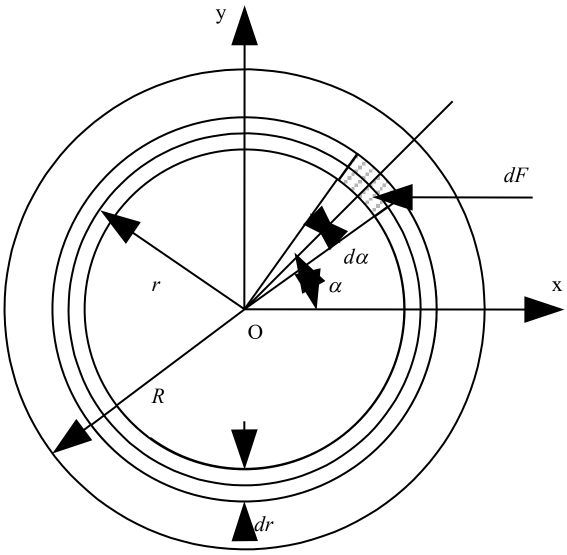
Aplicando el teorema de Steiner

$$J_{xG} = J_x - F \cdot d^2$$

$$J_{xG} = \frac{b \cdot h^3}{12} - \frac{b \cdot h}{2} \cdot \left(\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{b \cdot h^3}{12} - \frac{b \cdot h^3}{18}$$

$$\boldsymbol{J_{xG} = \frac{b \cdot h^3}{36}}$$

3. Para la figura (c), cálculo de los momentos de segundo orden, respecto de sus ejes baricéntricos (*J_{xG}, J_{yG} y J_{xGyG}*) y de su centro *O* (*J_O*) , y los módulos resistentes respecto de sus ejes baricéntricos (W_{xG}, y W_{yG}) y de su centro *O* (*W_O*)



Cálculo de *J_0*

$$J_O = \iint_F r^2 \cdot dF$$

siendo

$$dF = ds \cdot dr$$

pero el elemento de arco es:

$$ds = r \cdot d\alpha$$

luego,

$$dF = r \cdot d\alpha \cdot dr$$

Reemplazando

$$J_O = \iint_F r^2 \cdot dF = \int_{\alpha=0}^{\alpha=2\cdot\pi} \int_{r=0}^{r=R} r^3 \cdot dr \cdot d\alpha = \int_{\alpha=0}^{\alpha=2\cdot\pi} \frac{R^4}{4} \cdot d\alpha = \frac{R^4}{4} \cdot 2 \cdot \pi$$

$$\boldsymbol{J_o = \frac{\pi \cdot R^4}{2}}$$

y en función del diámetro la expresión correspondiente es:

$$\boldsymbol{J_o = \frac{\pi \cdot D^4}{32}}$$

Cálculo de *J_x*; *J_y* y *J_{xy}*

Recordando que

$$r^2 = x^2 + y^2$$

Se tiene que

$$J_O = \iint_F r^2 \cdot dF = \iint_F \left(x^2 + y^2\right) \cdot dF = \iint_F x^2 \cdot dF + \iint_F y^2 \cdot dF = J_x + J_y$$

Evidentemente, como por razones de simetría $J_x = J_y$,

$$J_x = J_y = \frac{J_O}{2}$$

Luego,

$$\boldsymbol{J_x = \frac{\pi \cdot D^4}{64}}$$
$$\boldsymbol{J_y = \frac{\pi \cdot D^4}{64}}$$

Dichas expresiones son válidas para cualquier otro eje que pasa por el centro *O*. Por otro lado, siendo los ejes baricéntricos ejes de simetría y , en consecuencia, ejes conjugados de inercia:

$$\boldsymbol{J_{xy} = 0}$$

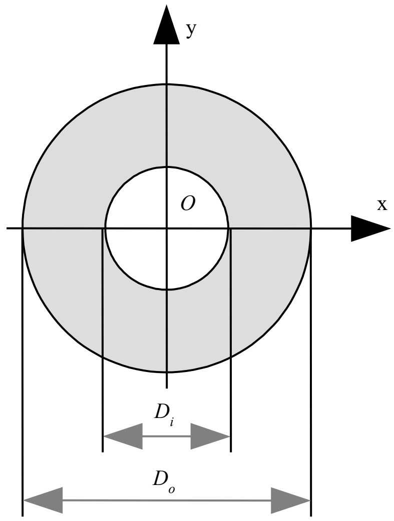
y como, además son ejes ortogonales, son ejes principales de inercia.

Cálculo de los módulos resistentes polar W_O y axil W_x

$$W_O = \frac{J_O}{R} = \frac{\frac{\pi \cdot D^4}{32}}{\frac{D}{2}} \qquad \boldsymbol{W_O = \frac{\pi \cdot D^3}{16}}$$

$$W_x = \frac{J_x}{R} = \frac{\frac{\pi \cdot D^4}{64}}{\frac{D}{2}} \qquad \boldsymbol{W_x = \frac{\pi \cdot D^3}{32}}$$

4. Determinación de los momentos de segundo orden, respecto de sus ejes baricéntricos (J_{xG}, J_{yG} y J_{xGyG}), para la figura (d)



Cálculo de J_o

$$J_O = \frac{\pi \cdot D_e^4}{32} - \frac{\pi \cdot D_i^4}{32} \qquad \boldsymbol{J_O = \frac{\pi \cdot D_e^4}{32} \cdot \left(1 - K^4\right)}$$

siendo

$$K = \frac{D_i}{D_e}$$

Cálculo de J_x, J_y y J_{xy}

$$J_x = \frac{\pi \cdot D_e^4}{64} - \frac{\pi \cdot D_i^4}{64} \qquad \boldsymbol{J_x = \frac{\pi \cdot D_e^4}{64} \cdot \left(1 - K^4\right)}$$

además, por razones de simetría,

$$J_y = \frac{\pi \cdot D_e^4}{64} - \frac{\pi \cdot D_i^4}{64} \qquad \boldsymbol{J_y = \frac{\pi \cdot D_e^4}{64} \cdot \left(1 - K^4\right)}$$

$$\boldsymbol{J_{xy} = 0}$$

Cálculo de W_x, W_y y W_O

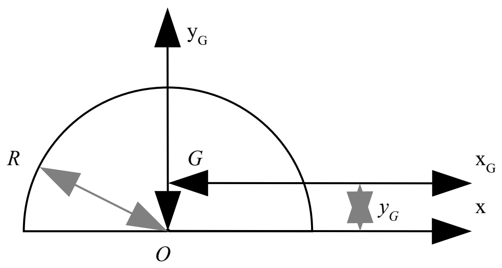
$$W_O = \frac{J_O}{\frac{D_e}{2}} = \frac{\frac{\pi \cdot D_e^4}{32} \cdot \left(1 - K^4\right)}{\frac{De}{2}} \qquad \boldsymbol{W_O = \frac{\pi \cdot D_e^3}{16} \cdot \left(1 - K^4\right)}$$

$$W_x = \frac{J_x}{\frac{D_e}{2}} = \frac{\frac{\pi \cdot D_e^4}{64} \cdot \left(1 - K^4\right)}{\frac{De}{2}} \qquad \boldsymbol{W_x = \frac{\pi \cdot D_e^3}{32} \cdot \left(1 - K^4\right)}$$

y por razones de simetría

$$\boldsymbol{W_y = \frac{\pi \cdot D_e^3}{32} \cdot \left(1 - K^4\right)}$$

5. Cálculo de los momentos de segundo orden, respecto de los ejes baricéntricos para la figura (e)



$$F = \frac{\pi \cdot R^2}{2}$$

Teniendo en cuenta el resultado del punto 3.2 de este ejercicio, y que el J_{yG} del semicírculo es la mitad que el correspondiente al círculo completo,

$$\boldsymbol{J_{yG} = \frac{\pi \cdot D^4}{128}} \qquad \boldsymbol{J_{yG} = \frac{\pi \cdot R^4}{8}}$$

$$\boldsymbol{J_x = \frac{\pi \cdot D^4}{128}} \qquad \boldsymbol{J_x = \frac{\pi \cdot R^4}{8}}$$

De acuerdo con lo visto en el punto 3 del ejercicio 1 del presente trabajo práctico,

$$y_G = \frac{4}{3} \cdot \frac{R}{\pi}$$

Aplicando el teorema de Steiner:

$$J_{xG} = J_x - F \cdot {y_G}^2 = \frac{\pi \cdot R^4}{8} - \frac{\pi \cdot R^2}{2} \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{R}{\pi} \right)^2 = \frac{\pi \cdot R^4}{8} - \frac{8 \cdot R^4}{9 \cdot \pi} = \frac{9 \cdot \pi^2 \cdot R^4 - 64 \cdot R^4}{72 \cdot \pi}$$

$$\boldsymbol{J_{xG} = \frac{R^4 \cdot \left(9 \cdot \pi^2 - 64\right)}{72 \cdot \pi}}$$

además, por razones de simetría,

$$\boldsymbol{J_{xGyG} = 0}$$

6. Cálculo del momento centrífugo (J_{xGyG}) para el triángulo de la figura (f)

Método A: Utilizando integral simple

$$J_{xy} = \iint_F x \cdot y \cdot dF$$

siendo

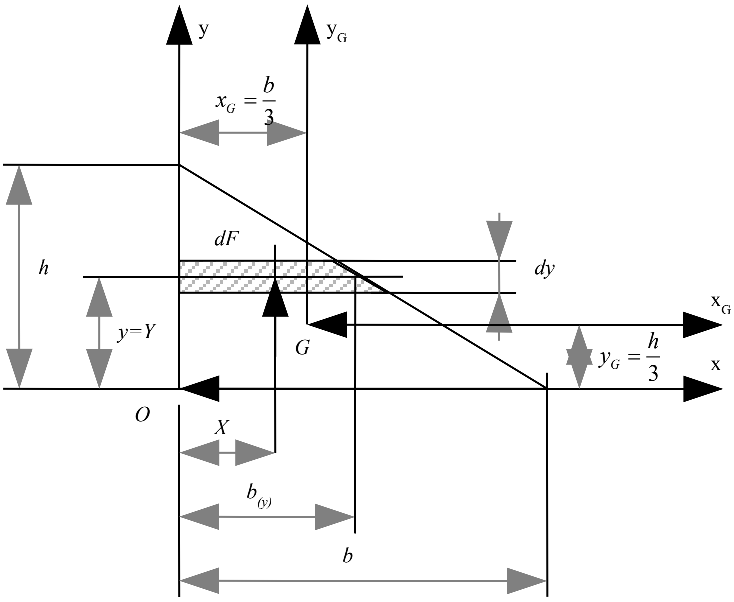
$$dF = b_{(y)} \cdot dy$$

Designando como X la distancia del centro de gravedad de cada elemento de área dF al eje coordenado y, es:

$$X=\frac{b_{(y)}}{2}$$

la expresión del momento centrífugo queda:

$$J_{xy}=\iint_F X\cdot y\cdot dF=\int_{y=0}^{y=h}\frac{b_{(y)}}{2}\cdot y\cdot b_{(y)}\cdot dy=\int_{y=0}^{y=h}\frac{b_{(y)}{}^{2}}{2}\cdot y\cdot dy$$



Por semejanza de triángulos:

$$\frac{b_{(y)}}{(h-y)}=\frac{b}{h}\qquad \text{o} \qquad b_{(y)}=\frac{b}{h}\cdot(h-y)$$

Reemplazando en la expresión anterior:

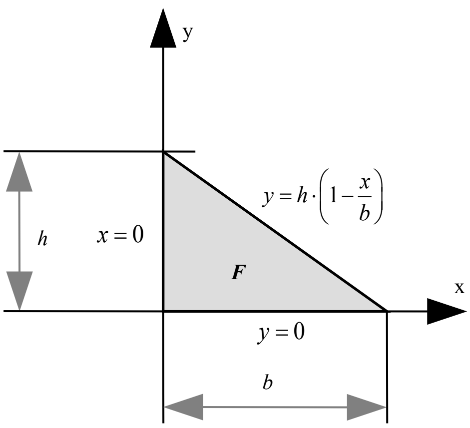
$$J_{xy}=\int_{y=0}^{y=h}\frac{b_{(y)}{}^{2}}{2}\cdot y\cdot dy=\int_{y=0}^{y=h}\frac{\left(\frac{b}{h}\cdot(h-y)\right)^2}{2}\cdot y\cdot dy=\int_{y=0}^{y=h}\frac{b^2}{2\cdot h^2}\cdot\left(h\cdot y^2-y^3\right)\cdot dy=\frac{b^2}{2\cdot h^2}\cdot\left(h\cdot\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}\right)_{y=0}^{y=h}=\frac{b^2}{2\cdot h^2}\cdot\left(\frac{h^4}{3}-\frac{h^4}{4}\right)$$

$$\boldsymbol{J_{xy}=\frac{h^2\cdot b^2}{24}}$$

Método B: Utilizando integral doble

Considerando que el recinto de integración es el mostrado,

.



$$J_{xy} = \iint_F x \cdot y \cdot dF = \int_{x=0}^{x=b} \left(\int_{y=0}^{y=h\cdot\left(1-\frac{x}{b}\right)} y \cdot dy \right) x \cdot dx = \int_{x=0}^{x=b} \left(\frac{y^2}{2} \right)_{y=0}^{y=h\cdot\left(1-\frac{x}{b}\right)} x \cdot dx = \int_{x=0}^{x=b} \frac{h^2}{2} \cdot \left(1 - \frac{x}{b}\right)^2 x \cdot dx = \int_{x=0}^{x=b} \frac{h^2}{2} \cdot \left(1 + \left(\frac{x}{b}\right)^2 - \frac{2 \cdot x}{b}\right) x \cdot dx$$

$$J_{xy} = \int_{x=0}^{x=b} \frac{h^2}{2} \cdot \left(x + \frac{x^3}{b^2} - \frac{2 \cdot x^2}{b} \right) dx = \frac{h^2}{2} \cdot \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4 \cdot b^2} - \frac{2 \cdot x^3}{3 \cdot b} \right)_{x=0}^{x=b} = \frac{h^2}{2} \cdot \left(\frac{b^2}{2} + \frac{b^4}{4 \cdot b^2} - \frac{2 \cdot b^3}{3 \cdot b} \right) = \frac{h^2}{2} \cdot b^2 \cdot \frac{6+3-8}{12}$$

$$\boldsymbol{J_{xy} = \frac{h^2 \cdot b^2}{24}}$$

Aplicando el teorema Steiner:

$$J_{xGyG} = J_{xy} - F \cdot x_G \cdot y_G$$
$$J_{xGyG} = \frac{b^2 \cdot h^2}{24} - \frac{b \cdot h}{2} \cdot \frac{b}{3} \cdot \frac{h}{3} = \frac{3 \cdot b^2 \cdot h^2 - 4 \cdot b^2 \cdot h^2}{72}$$
$$\boldsymbol{J_{xGyG} = -\frac{b^2 \cdot h^2}{72}}$$